

***Probleme de fizică care se rezolvă cu ajutorul ecuației de gradul al doilea***

***Problema 1.***

*Pe axa OX se desfășoară două mișcări, astfel încât distanțele mobilelor sunt rădăcinile ecuației:  $k_1 \cdot x^2 + k_2 t \cdot x + k_3 t + k_4 = 0$   
Se cere să se afle momentele de timp după care cele două distanțe sunt egale.*

***Rezolvare:***

Relația dată evident este o ecuație de gradul al doilea în necunoscuta x și coeficienții

- $a = k_1$
- $b = k_2 \cdot t$
- $c = k_3 \cdot t + k_4$

discriminatul ecuației este  $\Delta = k_2^2 \cdot t^2 - 4 k_1 \cdot (k_3 \cdot t + k_4)$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-k_2 \cdot t \pm \sqrt{k_2^2 \cdot t^2 - 4 k_1 (k_3 t + k_4)}}{2 k_1}$$

condiția ca ecuația de gradul să aibă soluții egale  $x_1 = x_2$  este ca  $\Delta = 0$

$$k_2^2 \cdot t^2 - 4 k_1 (k_3 \cdot t + k_4) = 0 \Rightarrow k_2^2 \cdot t^2 - 4 k_1 \cdot k_3 \cdot t - 4 k_1 \cdot k_4 = 0$$

Relația obținută este ecuație de gradul II în necunoscuta t, calculând discriminatul  $\Rightarrow$

$$\Delta_1 = 16 k_1^2 \cdot k_3^2 + 16 k_2^2 \cdot k_1 \cdot k_4 = 16 k_1 (k_1 \cdot k_3^2 + k_2^2 \cdot k_4) \Rightarrow$$

$$t_1, t_2 = \frac{4 k_1 \cdot k_3 \pm \sqrt{16 \cdot k_1 \cdot (k_1 \cdot k_3^2 + k_2^2 \cdot k_4)}}{2 \cdot k_2^2}$$

## Problema 2.

Un mobil este aruncat de jos în sus cu viteza inițială  $v_0$ .  
Să se arate ca există 2 momente de timp  $t_1, t_2$  pentru care energia cinetică a corpului este egală cu energia potențială și să se determine aceste momente.

### Rezolvare:

Se folosesc în rezolvarea următoarele notații:

$E_{cA}$  – energia cinetică din A

$E_{pA}$  – energia potențială din A

$E_A$  – energia mecanică din A

$m$  – masa corpului

$g$  – accelerația gravitațională ( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ )

$v_0$  – viteza inițială

Folosim sistemul de referință Oy.

$$E_A = E_{cA} + E_{pA}$$

$$E_{cA} = E_{pA}$$

$$E_{cA} = \frac{m \cdot v_A^2}{2} \quad \left\{ \Rightarrow \frac{m \cdot v_A^2}{2} = m \cdot g \cdot h \quad (*) \right.$$

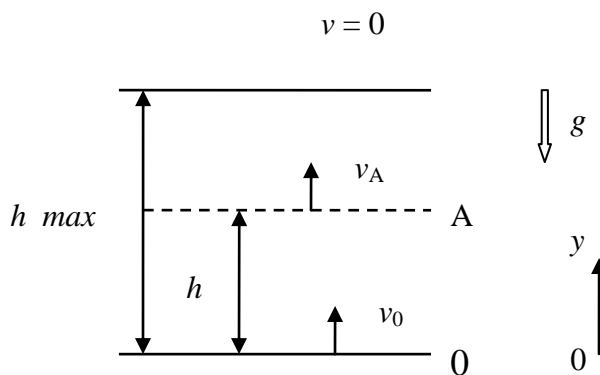
$$E_{pA} = m \cdot g \cdot h$$

Se află  $v_A$  cu ajutorul legii vitezei:  $v = v_0 + a(t - t_0)$  și înălțimea  $h$  folosind ecuația mișcării rectilinie uniform variată :  $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -g \\ t_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_a = v_0 - g \cdot t$$

$$\text{Având sistemul de referință Oy} \Rightarrow y = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$



$$\left. \begin{array}{l} a = -g \\ t_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ y = h \end{array} \right\} \Rightarrow h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Înlocuind datele aflate  $h$  și  $v_a$  în relația (\*)  $\Rightarrow$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = m \cdot g \cdot h$$

$$\frac{m}{2} (v_0 - g \cdot t)^2 = mg(v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2) \Rightarrow (v_0 - g \cdot t)^2 = 2 g(v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2) \Rightarrow (v_0 - g \cdot t)^2 = 2g \cdot v_0 \cdot t - g^2 \cdot t^2$$

$$\Rightarrow (v_0 - g \cdot t)^2 = v_0^2 - 2 v_0 \cdot g \cdot t + g^2 \cdot t^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 - 2 v_0 \cdot g \cdot t + g^2 \cdot t^2 = 2g \cdot v_0 \cdot t - g^2 \cdot t^2 \Rightarrow v_0^2 - 2v_0 \cdot g \cdot t + g^2 \cdot t^2 - 2g \cdot v_0 \cdot t + g^2 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0^2 - 4 v_0 \cdot g \cdot t + 2g^2 \cdot t^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2g^2 \cdot t^2 - 4 v_0 \cdot g \cdot t + v_0^2 = 0$$

Această relație evident este o ecuație de gradul al doilea în necunoscuta  $t$  și coeficienții:

- $a = 2g^2$
- $b = -4 v_0 \cdot g$
- $c = v_0^2$

discriminatul ecuației este  $\Delta = (4 v_0 g)^2 - 8 g^2 v_0^2 \Rightarrow \Delta = 16 v_0^2 \cdot g^2 - 8 g^2 \cdot v_0^2 \Rightarrow \Delta = 8 v_0^2 g^2$

$$t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$t_1, t_2 = \frac{4 v_0 g \pm \sqrt{8 v_0^2 \cdot g^2}}{4 g^2} \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{4 \cdot v_0 \cdot g \pm 2 \cdot v_0 \cdot g \cdot \sqrt{2}}{4 g^2} \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{2 v_0 \cdot g (2 \pm \sqrt{2})}{4 g^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1, t_2 = \frac{v_0 (2 \pm \sqrt{2})}{2g}$$

Sunt posibile 2 valori ale timpului pentru care  $E_c = E_p$ .

Un timp  $t_1$  la urcare  $t_1 = \frac{v_0(2-\sqrt{2})}{2g}$ , iar când corpul revine în poziția în care este din nou  
îndeplinită condiția  $E_c = E_p$  este  $t_2 = \frac{v_0(2+\sqrt{2})}{2g}$ .

*Prof. coordonatori*  
*Dan Zaharia*  
*Adriana Petrovici*